

【Q2 (2023 年 8 月 8 日)】

書籍 259 ページ 演習問題 1, 1 解説で  $(u_2-u_1)$  の 2 乗=0,  $(v_2-v_1)$  の 2 乗=0 としていますがなぜこうなるのでしょうか? 2 乗が 0 になるなら、 $u_2-u_1$  も 0 になるのですか?

【A2】 ご質問ありがとうございます。

テキストの問題 1.1(テキスト p.21)とその解説(p.259)を下に示しています。

問題 1.1 で示した解説の  $l'$  を元の式をそのまま示すと下式のようになります。

$$l' = l \sqrt{1 + 2 \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{u_2 - u_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + 2 \frac{y_2 - y_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l} + \frac{v_2 - v_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l}} \quad (Q1)$$

解説で示した式は、下式です。

$$l' = l \sqrt{1 + 2 \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + 2 \frac{y_2 - y_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l}} \quad (Q2)$$

上式より、例えば

$$\frac{u_2 - u_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} \ll \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l}$$

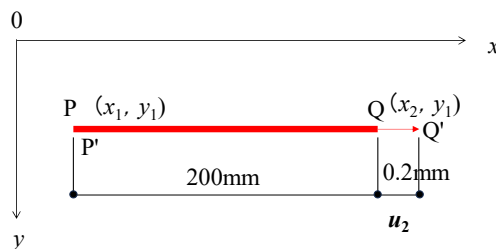
すなわち、上式の左辺は右辺に比較して十分に小さいとして無視したということです。  $u_2 - u_1 = 0$ ,  $v_2 - v_1 = 0$  となるわけではありません。解説で  $(u_2 - u_1)^2 = 0$ ,  $(v_2 - v_1)^2 = 0$  としたのは少々乱暴な説明・表現だったかもしれません。

なお、下図のような長さ  $l$  が 200mm の鋼棒があるとして、降伏応力度  $\sigma_y$  を  $235\text{N/mm}^2$  とすると、降伏ひずみ  $\epsilon_y$  は、

$$\text{ヤング係数 } E \text{ を } 2.05 \times 10^5 \text{N/mm}^2 \text{ とし、 } \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{235}{2.05 \times 10^5} = 0.00115 \text{ となります。すなわち、200mm の棒は}$$

0.23mm(=200mm × 0.00115)伸びれば降伏することになります。

下図のような簡単な棒を考えます。水平に置かれた長さ 200mm の棒で、点 P が動かず点 Q が右方向へ 0.2mm だけ変位したとします。すなわち  $u_1=0$  で、 $u_2=0.2\text{mm}$  です。上記の鋼棒の材料を使うとすると、0.2mm は相当に大きな変位となることがわかります。また、この時、変形前の長さは  $l=200\text{mm}$ 、変形後の長さは  $l'=200.2\text{mm}$  です。



この例のとき、式(Q1)は式(Q3)となります。

$$l' = l \sqrt{1 + 2 \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2}{l} + \frac{u_2}{l} \cdot \frac{u_2}{l}} = 200 \sqrt{1 + 2 \frac{200 \cdot 0.2}{l} + \frac{0.2 \cdot 0.2}{l}} = 200.2 \quad (Q3)$$

上式では、 $l=200$ ,  $x_2-x_1=200$ ,  $u_2=0.2$  としています ( $v_1=v_2=0$  です)。変形後の正しい長さ 200.2mm が得られます。

一方、式(Q2)を用いると下式が得られます。

$$l' = l \sqrt{1 + 2 \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l}} = 200 \sqrt{1 + 2 \frac{200}{l} \cdot \frac{0.2}{l}} = 200.1999 \quad (\text{Q4})$$

さらに、下式(Q5)を用いると、

$$l' = l \left( 1 + \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{y_2 - y_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l} \right) \quad (\text{Q5})$$

本例の場合は次のように正解の 200.2mm を得ることができます。

$$l' = l \left( 1 + \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{y_2 - y_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l} \right) = 200 \left( 1 + \frac{200}{l} \cdot \frac{0.2}{200} \right) = 200.2 \quad (\text{Q6})$$

微小変位弾性問題では、式(Q2)や式(Q5)は精度良く正解値を評価できることが理解できます。

### 問題 1.1 伸びと変位の関係

図 1.18 において P 点、Q 点の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$  とする。変形後に P' 点、Q' 点になったとする (図 1.8 参照)。変形前後の長さ、 $l$  と  $l'$  は下式となる。

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad l' = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2}$$

上式より、変形が小さいとして、伸び  $\delta$  を算定する式(1.11)を誘導しなさい。

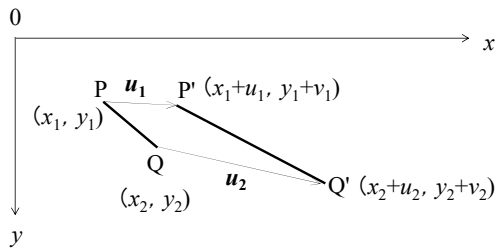


図 1.18

### 問題 1.1 伸びと変位の関係

変形後の長さ  $l'$  は下式となる。

$$l' = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (u_2 - u_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(v_2 - v_1) + (v_2 - v_1)^2}$$

変形前の長さ  $l$  は、 $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 、また  $(u_2 - u_1)^2 = 0$ 、 $(v_2 - v_1)^2 = 0$  とすると、下式が得られる。

$$l' = l \sqrt{1 + 2 \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + 2 \frac{y_2 - y_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l}} = l \left( 1 + \frac{x_2 - x_1}{l} \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{y_2 - y_1}{l} \cdot \frac{v_2 - v_1}{l} \right)$$

方向余弦  $(\lambda, \mu)$  は  $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{l}$ 、 $\mu = \frac{y_2 - y_1}{l}$  より、 $l' = l \left( 1 + \lambda \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} + \mu \cdot \frac{v_2 - v_1}{l} \right) = l + \lambda(u_2 - u_1) + \mu(v_2 - v_1)$  となり、伸び  $\delta$  は、次のように得られる。 $\delta = l' - l = \lambda(u_2 - u_1) + \mu(v_2 - v_1)$ 。

